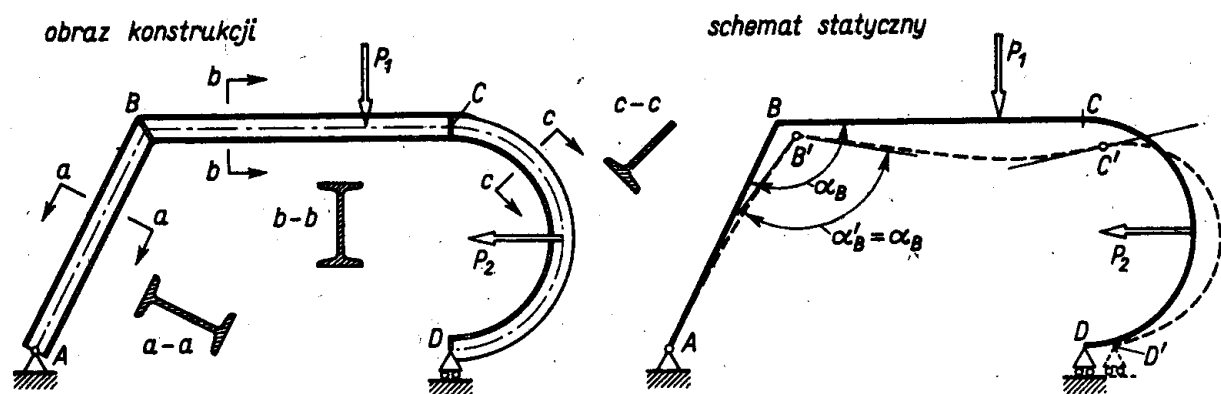


Konstrukcje prętowe

9 STATYCZNIE WYZNACZALNE KONSTRUKCJE PRĘTOWE

9.1. Ramy płaskie

Konstrukcją prętową nazywamy urządzenie złożone z prętów prostych lub zakrzywionych tworzących zespół geometryczny niezmienny, o ile pominąć odkształcenia prętów wywołane obciążeniem. Najprostszy zespół stanowi ciąg prętów, których końce łączą się kolejno w sztywnych narożach (rys. 9.1). Przy działaniu obciążeń naroże takie przemieszcza się jako sztywna całość, przy czym kąty między osiami prętów zostają nie zmienione. Taki typ konstrukcji spotykany często w praktyce nazywamy *ramą*. Gdy osie wszystkich prętów leżą w jednej tzw. *płaszczyźnie ramy*, wówczas ramę nazywamy *płaską*. Gdy warunek ten nie jest spełniony, rama jest *przestrzenna*.

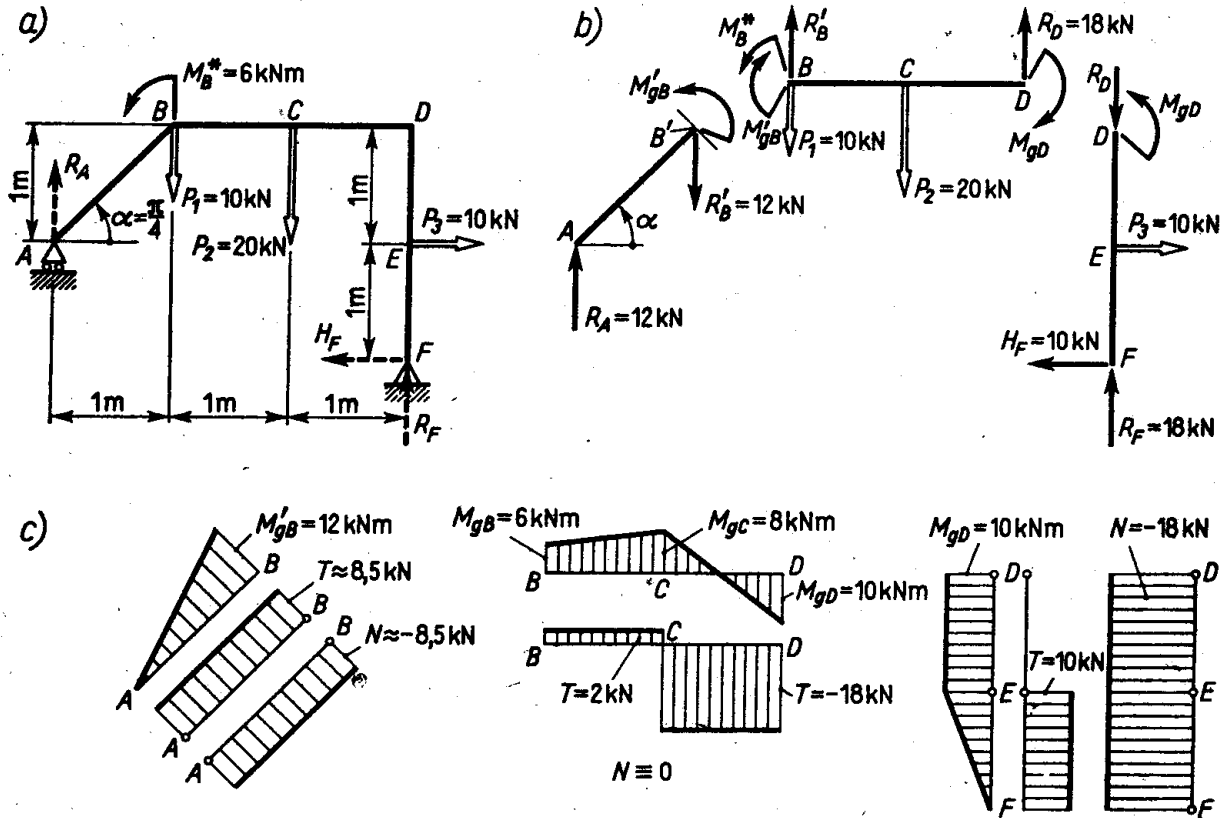


Rys. 9.1. Obraz konstrukcji prętowej i jej schemat statyczny

Linia $ABCD$ – oś konstrukcji przed obciążeniem, $AB'C'D'$ – po obciążeniu; $\alpha_B = \sphericalangle ABC$, α'_B – kąt w węzle B' między osiami odkształconych prętów AB' i $B'C'$.

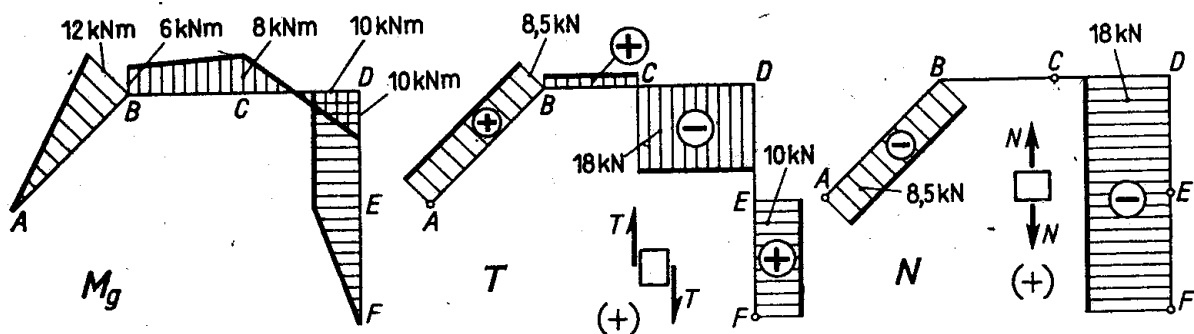
Analizę ram płaskich rozpoczynamy od ustalenia schematu statycznego (rys. 9.2a) i określenia reakcji R_A , R_F i H_F . W wyniku mamy pełny obraz obciążenia. Z kolei wyznaczamy wysiłek przekrojów. Znaczne ułatwienie daje tu podział na pręty składowe (rys. 9.2b).

z jednoczesnym wprowadzeniem oddziaływań dających równowagę każdego pręta. I tak, biorąc obciążony siłą $R_A = 12 \text{ kN}$ pręt AB' , w którym przekrój B' poprowadzono tuż na lewo od naroża B , widzimy, że oddziaływanie w przekroju B' składa się z siły $R'_B = 12 \text{ kN}$ równoległej do R_A i momentu $M'_{gB} = 12 \text{ kNm}$. Z kolei w pręcie BCD dołączamy do obciążeń P_1, P_2 i M_B^* znane już R'_B i M'_{gB} z przeciwnymi jednak zwrotami, gdyż są to



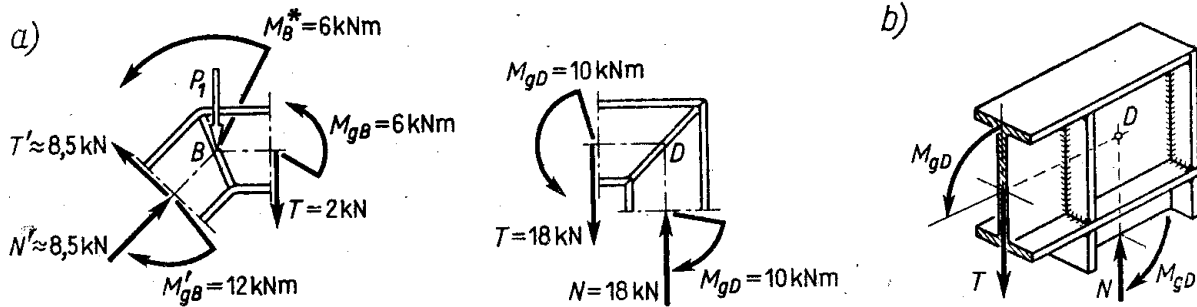
Rys. 9.2. Przykład analizy ramy płaskiej

oddziaływania pręta AB' na BCD , a w przekroju D wyznaczamy $R_D = 18 \text{ kN}$ i $M_{gD} = 10 \text{ kNm}$ będące oddziaływaniem pręta DEF . Na koniec sprawdzamy równowagę ostatniego pręta DEF , obciążonego znanymi od początku siłami P_3, H_F i R_F oraz wyznaczonymi już R_D i M_{gD} . Te ostatnie mają zwroty przeciwne niż w pręcie BCD . Po takim podziale wyznaczenie wysiłku przekroju i wykresów M_g, T i N (rys. 9.2c) jest już operacją



Rys. 9.3. Ostateczne wykresy M_g, N, T dla ramy z rys. 9.2

znana z części pierwszej. Rzędne wykresów odkładamy prostopadłe do osi odpowiedniego pręta, przy czym rzędne M_g dajemy po stronie ściskanych włókien. Siłę T uważamy za dodatnią, gdy daje ona współzegarowy obrót elementu, a dodatnia siła N odpowiada rozciąganiu. Te wykresy dla poszczególnych prętów łączymy zazwyczaj w jedną całość (rys. 9.3).



Rys. 9.4. Statyka naroży ramy

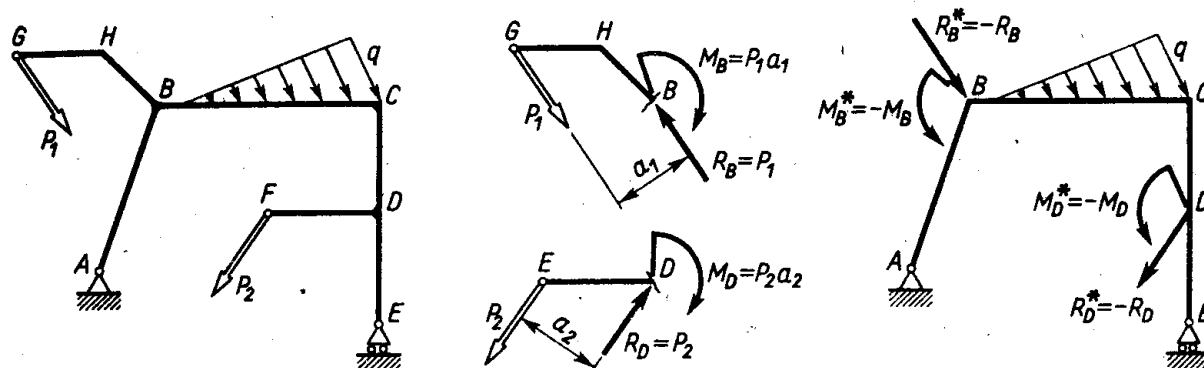
Na zakończenie tego etapu zbadajmy jeszcze statykę naroży (rys. 9.4a). Wykorzystując poprzednie wyniki (rys. 9.2c) mamy obraz naroża B , obciążonego siłą P_1 i momentem M_B^* oraz składowymi wysiłku przekroju w prętach AB' i BCD . Łatwo sprawdzić, że naroże jest w równowadze. Jak widać, obciążenie naroża momentem M_B^* pociąga przeskok momentu gnącego o wartość M_B^* . Przeskoğu tego nie ma w narożu D , gdyż nie ma tam zewnętrznego momentu. Obydwa te spostrzeżenia często wykorzystujemy przy kontroli przebiegu M_g .

W drugim etapie analizy mając już wykresy M_g , T i N określamy ekstremalne naprężenia w niebezpiecznym przekroju i oceniamy bezpieczeństwo ustroju. Jednoczesne istnienie M_g , T i N powoduje, że ta ocena jest zadaniem z wytrzymałości złożonej. W takim ujęciu jest to znana już kontrola konstrukcji. Inny wariant, tj. kształtowanie konstrukcji, polega na doborze wymiarów zapewniających dostateczne bezpieczeństwo. W obydwóch wariantach podstawą są informacje znane już z pierwszej i drugiej części książki. Wyniki tego etapu analizy są wiarygodne z techniczną dokładnością dla części konstrukcji poza narożami. Raptowna zmiana kształtu (załomy) w narożach ma ten sam efekt co w prostych prętach istnienie karbów, zmian przekroju itp. Wartości naprężeń w narożu zależą od jego ukształtowania i nieistotna pozornie zmiana przekątnego żebra w narożu D (rys. 9.4a) na układ żeber (rys. 9.4b) ma tu ogromny lokalny wpływ⁽¹⁾.

Zagadnienia ram z tzw. *odgałęzieniami* (rys. 9.5) sprowadzają się do poprzednio rozpatrzonego. Wybierzmy dowolnie ciąg prętów $ABCDE$ jako podstawowy, a ciągi GHB i FD jako odgałęzienia. Odcinając te odgałęzienia bez naruszania ciągu podstawowego określamy niezbędne do ich równowagi oddziaływania R_B , M_B , R_D i M_D . Z kolei ciąg podstawowy obciążamy przeciwnie skierowanymi siłami R_B^* i R_D^* oraz momentami M_B^* i M_D^* . W ten sposób otrzymujemy trzy zagadnienia typu poprzedniego.

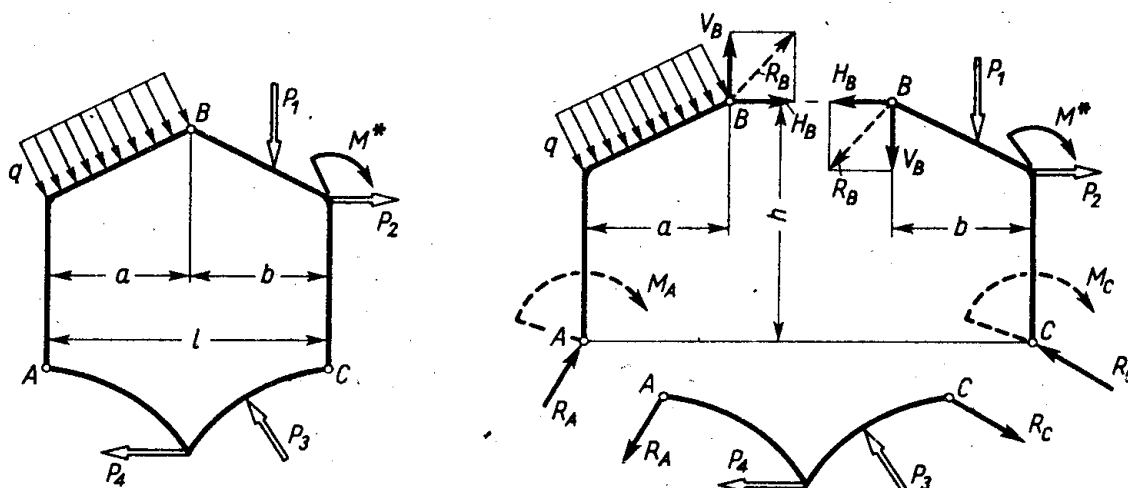
Łącząc w jeden statycznie wyznaczalny zespół szereg ram prostych (rys. 9.1) otrzy-

⁽¹⁾ Książka autora, *Statyka i stateczność konstrukcji*, wyd. 2, Warszawa 1965, PWN.



Rys. 9.5. Analiza ramy z odgażeniami

musimy tzw. *ramy zespolowe*. Ich przykładem jest rama trójprzegubowa (rys. 9.6) złożona z trzech ram prostych AB , BC i AC połączonych przegubami A , B i C . Po rozcięciu jej na rami proste wyznaczamy oddziaływania R_A , R_B i R_C w przegubach. W tym celu rozkła-



Rys. 9.6. Rama trójprzegubowa; określenie reakcji w przegubach

damy reakcję R_B na składowe V_B i H_B . Z równania równowagi momentów rami AB względem punktu A i podobnie rami BC względem C mamy

$$-V_B a + H_B h + M_A = 0, \quad -V_B b - H_B h + M_C = 0,$$

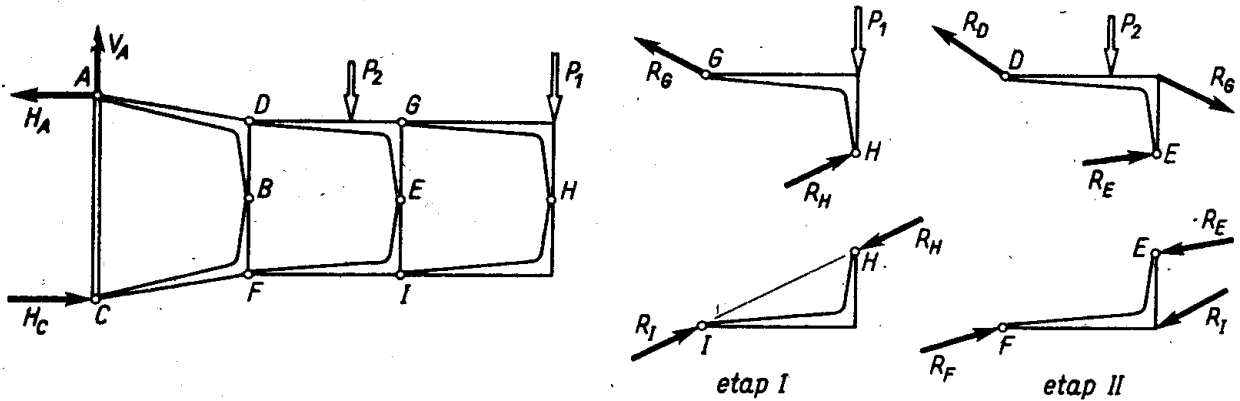
gdzie M_A (M_C) — moment obciążenia rami AB (BC) względem punktu A (C). Z równań tych otrzymujemy

$$V_B = (M_A + M_C)/l, \quad H_B = (M_C a - M_A b)/hl,$$

gdzie oznaczenia są widoczne z rysunku. Pozostałe reakcje R_A i R_C obliczamy z równań równowagi rzutów dla rami AB i BC . Po określeniu reakcji każdą z trzech ram prostych rozwiązujemy jak poprzednio.

Na ramie trójprzegubowej ABC (rys. 9.7) możemy nadbudować kolejne rami DE i EF złączone przegubem E , a następnie rami GH i HI złączone przegubem H . Taki złożony ustrój rozwiązujemy w kolejności odwrotnej do jego tworzenia. I tak w etapie I wyzna-

czamy R_G, R_H, R_I , jak na rys. 9.6. W etapie II określamy reakcje R_D, R_E, R_F traktując już oddziaływania R_G i R_I jako obciążenia na równi z siłą P_2 . Na końcu rozwiązujemy



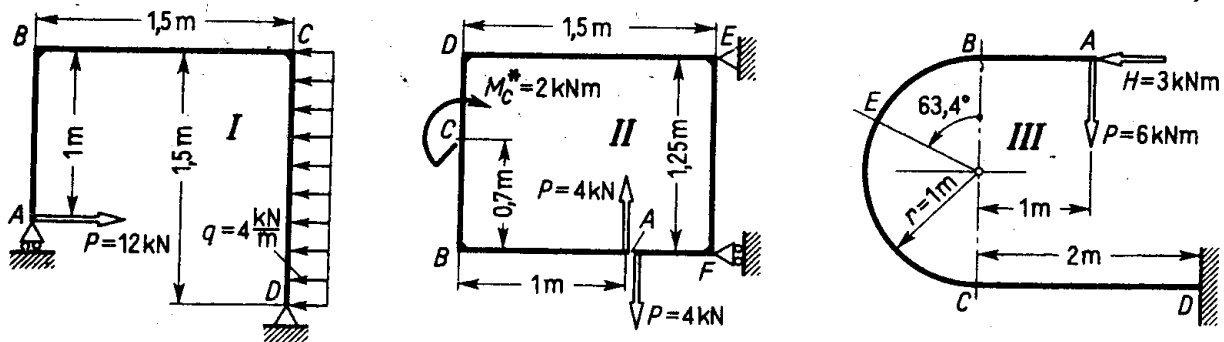
Rys. 9.7. Przykład ustroju ramowego statycznie wyznaczalnego

podstawową ramę ABC obciążoną znanymi już reakcjami R_D i R_F . Widać, że to rozwiązanie przypomina analizę kratownic, a różni się innym formułowaniem równań równowagi i inną pracą elementów.

Zadania

1. Wyznaczyć przebieg M_g, T i N w podanych ramach (rys. 9.8).

Odp. Jako sprawdzian podaje się: dla ramy I jest $(M_g)_{\text{ekstr}} = 13,5 \text{ kN m}$ w narożu C; dla ramy II jest $|M_g|_{\text{ekstr}} = 4 \text{ kN m} = \text{const}$ na odcinku BC oraz $|M_g|_{\text{ekstr}} = 4 \text{ kN m}$ w narożu E; dla ramy III $|M_g|_{\text{ekstr}} = 9,66 \text{ kN m}$ w przekroju E oraz $|M_g|_{\text{ekstr}} = 12 \text{ kN m}$ w przekroju D.



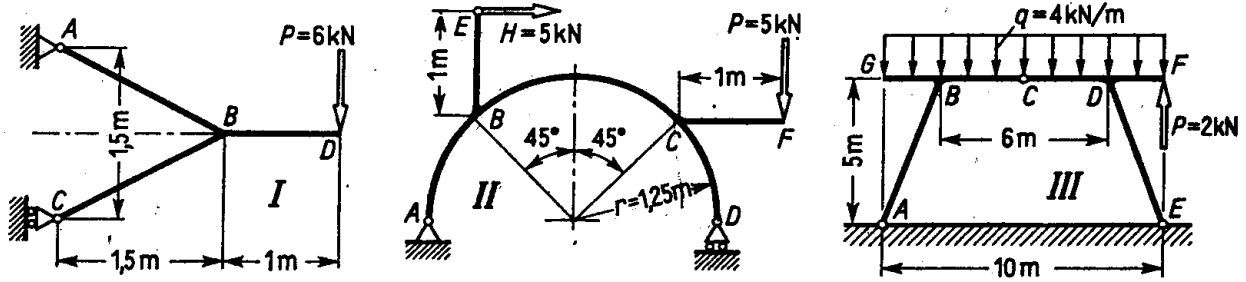
Rys. 9.8.

2. Wyznaczyć ekstremalny moment M_g w podanych ramach (rys. 9.9).

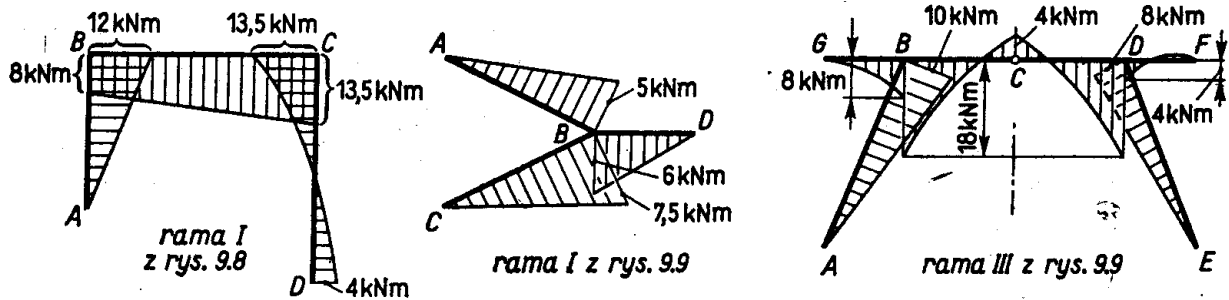
Odp. Rama I: $7,5 \text{ kN m}$ w przekroju B pręta BC; rama II: $7,58 \text{ kN m}$ w przekroju B odcinka BC; rama III: 18 kN m w przekrojach B i D części BCD.

3. Nie rachując szczegółowo wskazać rażące błędy wykresów M_g (rys. 9.10), które ktoś podał jako wynik poprzednich zadań.

Odp. Rama I z rys. 9.8: przeskok M_g w narożu B oraz $M_g \neq 0$ w punkcie D; rama I z rys. 9.9: brak równowagi węzła B; rama III z rys. 9.9: $M_g \neq 0$ i załom wykresu w przegubie C oraz brak równowagi węzła D.



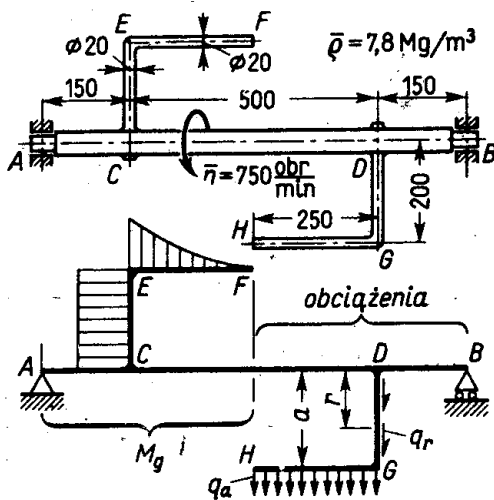
Rys. 9.9.



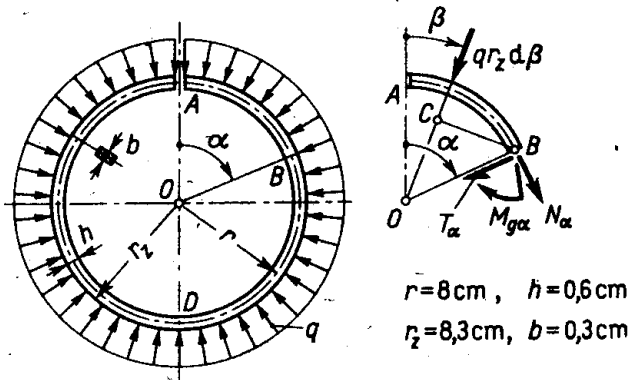
Rys. 9.10. Błędne rozwiązania ram poprzednich

4. Stalowe mieszadło (rys. 9.11) składa się z wałka AB i dwóch ramion CEF i DGH . Obliczyć ekstremalne naprężenia w ramieniu.

Odp. Obciążeniami są „siły bezwładności”: $q_a = \bar{\rho} \omega^2 A a$, $q_r = \bar{\rho} \omega^2 A r$, gdzie $A = 3,14 \text{ cm}^2$, $\omega = \pi \bar{n} / 30 = 78,5 \text{ rad/s}$, $\bar{\rho} = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, skąd $q_a = 3,02 \text{ kN/m}$, $q_r = 3,02 (r/a) \text{ kN/m}$. W niebezpiecznym przekroju C jest $M_g = 94,6 \text{ Nm}$, $N = 1,06 \text{ kN}$, skąd $\sigma_e = (M_g/W) + (N/A) \approx 124 \text{ MPa}$.



Rys. 9.11.



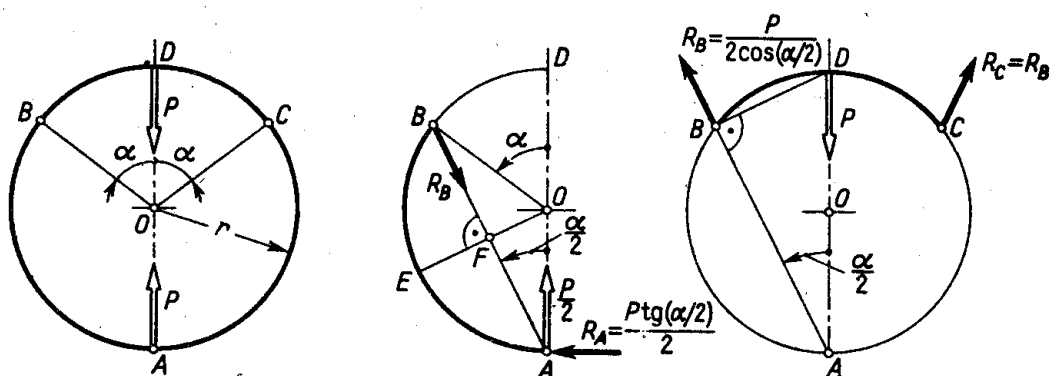
Rys. 9.12.

5. Na żeliwny pierścień tłokowy działa promieniowy nacisk $q = 0,3 \text{ kN/m}$ (rys. 9.12). Określić ekstremalne naprężenie.

Odp. Moment gnący w przekroju B od siły $q r_2 d\beta$ jest $q r_2 d\beta \cdot BC = q r_2 r \sin(\alpha - \beta) d\beta$, a całkowity moment

$$M_{g\alpha} = \int_0^\alpha q r_2 r \sin(\alpha - \beta) d\beta = q r_2 r (1 - \cos \alpha)$$

osiąga ekstremum w przekroju D ($\alpha = \pi$). Pomijając wpływ sił N oraz krzywizny mamy $\sigma \approx \approx \pm 12q_r r/bh^2 \approx \pm 220$ MPa.



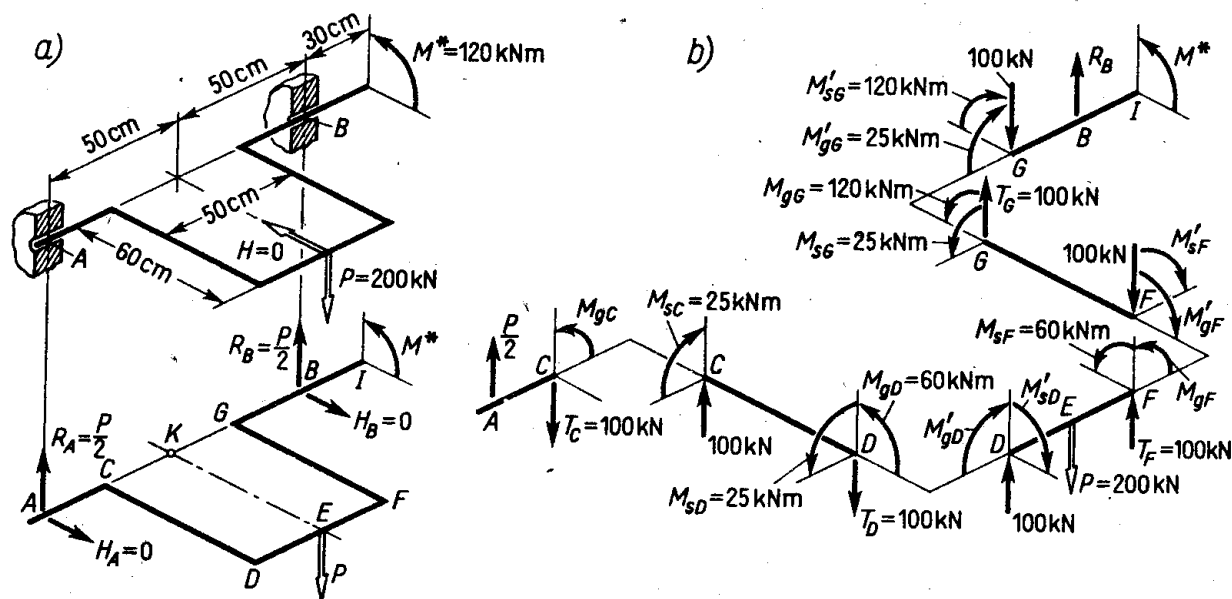
Rys. 9.13.

6. Trójprzegubowy pierścień obciążono siłami P (rys. 9.13). Gdzie należy umieścić przegub B i C , aby ekstremalny M_g był najmniejszy?

Od p. Po określeniu reakcji R_A i R_B piszemy warunek $R_B \cdot \overline{EF} = R_B \cdot \overline{BD}$, skąd $\sin(\alpha/2) = 1/3$, $\alpha = 38,9^\circ$ i $(M_g)_{ekstr} \approx 0,353 Pr$.

9.2. Ramy obciążone przestrzennie

Zacznijmy od płaskiej ramy⁽¹⁾ obciążonej prostopadłą do płaszczyzny ramy siłą P i momentem M^* równoważącym jej obrotowe działanie (rys. 9.14a). Po usunięciu więzów i określeniu reakcji $R_A = R_B = P/2$ rozcinamy myślowo ramę na poszczególne pręty (rys. 9.14b), wstawiając w przecięciach oddziaływania niezbędne do zachowania równowagi.



Rys. 9.14. Analiza ramy płaskiej przestrzennie obciążonej

⁽¹⁾ Takiemu schematowi odpowiada na przykład wał korbowy.

I tak dla pręta AC

$$T_C = P/2 = 100 \text{ kN} \quad \text{i} \quad M_{\theta C} = (P/2) \cdot \overline{AC} = 25 \text{ kNm}.$$

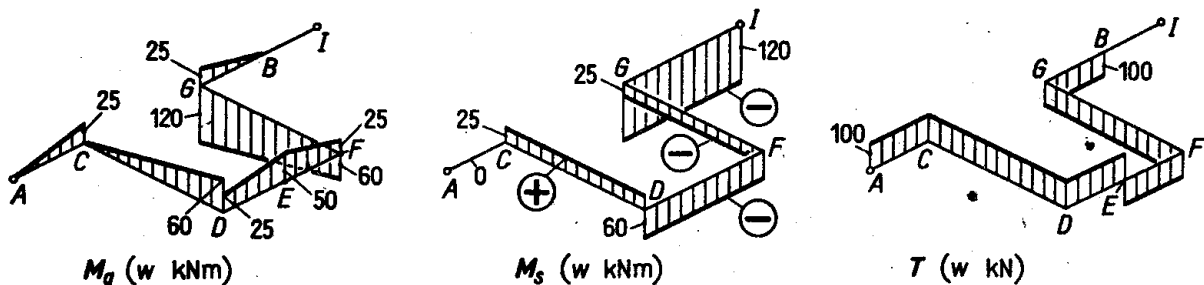
Wielkości te są wysiłkiem przekroju C pręta AC , przy czym $M_{\theta C}$ jest momentem gnącym, T_C — siłą tnącą. Z kolei pręt CD obciążają w punkcie C znany już moment $M_{sC} = M_{\theta C} = 25 \text{ kNm}$ oraz siła 100 kN , będące oddziaływaniem pręta AC , a więc o przeciwnych niż poprzednio zwrotach. Niezbędny do równowagi pręta CD układ sił i momentów w punkcie D

$$M_{sD} = M_{sC} = 25 \text{ kNm}, \quad M_{\theta D} = 100 \text{ kN} \cdot \overline{CD} = 60 \text{ kNm}, \quad T_D = 100 \text{ kN}$$

ma zwroty podane na rysunku. Układ ten po zmianie zwrotów, czyli $M'_{\theta D} = M_{sD}$, $M'_{sD} = M_{\theta D}$, i siła 100 kN jest z kolei obciążeniem końca D pręta DEF , skąd mamy niezbędne do równowagi tego pręta $T_F = P - 100 \text{ kN}$ oraz

$$M_{sF} = M'_{sD} = 60 \text{ kNm}, \quad M_{\theta F} = M'_{\theta D} + 100 \text{ kN} \cdot \overline{DF} - P \cdot \overline{EF} = 25 \text{ kNm}.$$

Podobnie postępujemy z pozostałymi prętami FG , GBI . W wyniku zadanie sprowadza się do analizy pięciu prętów prostych. W analizie tej należy zwrócić uwagę na przeskok w narożach poszczególnych składowych wysiłku przekrojów. Gdy na przykład badamy przekrój C pręta AC , wówczas moment $M_{\theta C}$ jest oczywiście momentem gnącym. Jeśli jednak badamy przekrój C pręta CD , to oddziaływanie pręta AC , czyli M_{sC} , jest momentem skręcającym dla przekroju C pręta CD . Podobnie w narożu D : moment gnący $M_{\theta D}$ dla



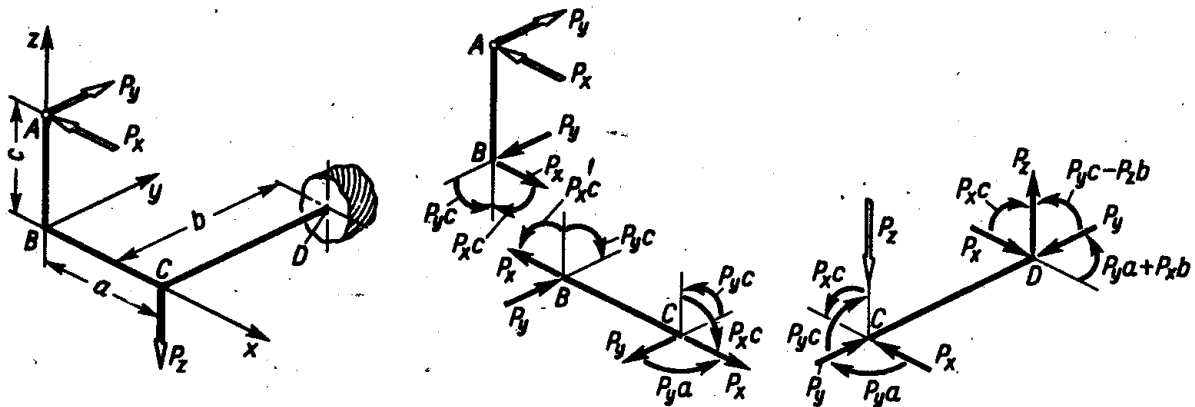
Rys. 9.15. Wyniki analizy ramy z rys. 9.14

przekroju D pręta CD staje się momentem skręcającym M'_{sD} dla przekroju D pręta DEF , a poprzedni moment skręcający M_{sD} staje się momentem gnącym $M'_{\theta D}$ itd. Te fakty należy uwzględnić przy budowaniu wykresów M_{θ} i M_s , które zazwyczaj rysujemy w perspektywie (rys. 9.15). Rzędne M_{θ} odmierzamy przy tym po stronie włókien ściskanych, a do rzędnych M_s stosujemy umowę z rys. 3.5.

Jeśli na ramę płaską działa także obciążenie w płaszczyźnie ramy ($H \neq 0$), to jego działanie badamy oddzielnie, jak podano w art. 9.1, a następnie stosujemy superpozycję. Takiemu łącznemu działaniu odpowiada najogólniejszy przypadek wytrzymałości złożonej pręta, w którym istnieją wszystkie składowe wysiłki.

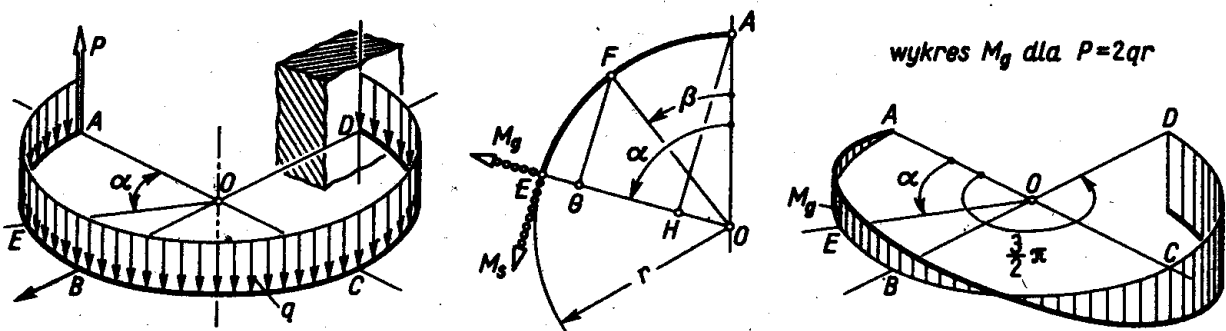
Powyższą metodę rozdziału ramy na poszczególne pręty stosujemy także w ramach przestrzennych⁽¹⁾ (rys. 9.16). Jediną różnicę stanowi konieczność formułowania dla każdego

⁽¹⁾ Sprawdzenie wyników z rys. 9.16 zostawia się czytelnikowi.



Rys. 9.16. Analiza ramy przestrzennej

pręta wszystkich sześciu warunków równowagi⁽¹⁾. Zbadanie wysiłku przekrojów w prętach daje w wyniku sześć wykresów, tj. momentów gnących, skręcającego, siły wzdłużnej i sił tnących. Dla większej jasności wykresy te zaleca się rysować dla oddzielnych prętów. Podobnie jak poprzednio, w narożach ram przestrzennych zachodzą przeskoki składowych wysiłku. Przeskoki te powodują, że rozkład naprężeń w narożach odbiega znacznie od wyników analizy dla pręta prostego i tak jak w ramach płaskich zależy od ukształtowania naroża (patrz rys. 9.4).



Rys. 9.17. Analiza pierścienia obciążonego przestrzennie

Zagadnieniami wymagającymi pewnej wyobraźni są przestrzenne obciążenia prętów zakrzywionych (rys. 9.17). Na myślowo odciętą część AE działają: do góry siła P i do dołu obciążenie $qr\alpha$, wobec czego niezbędna do równowagi i skierowana do dołu siła tnąca

$$T = P - qr\alpha. \quad (a)$$

Przy badaniu równowagi momentów względem osi OE zauważmy, że ramię siły P jest $\overline{AH} = r \sin \alpha$, a ramię elementarnej siły $(qr d\beta)$ jest $\overline{FG} = r \sin(\alpha - \beta)$, skąd

$$M_\theta - Pr \sin \alpha + \int_0^\alpha qr d\beta \cdot r \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

⁽¹⁾ Poprzednio (rys. 9.14), gdy $H = 0$, trzy warunki równowagi, tj. sumy rzutów na osie w płaszczyźnie ramy i momentów względem osi do niej prostopadłej, są spełnione tożsamościowo.

a po scałkowaniu i uporządkowaniu

$$M_g = Pr \sin \alpha - qr^2(1 - \cos \alpha). \quad (b)$$

Podobnie z warunku równowagi momentów względem stycznej do osi pręta w punkcie E mamy

$$M_s + P \cdot \overline{EH} - \int_0^\alpha (qr \, d\beta) \cdot \overline{EG} = 0,$$

a uwzględniając, że $\overline{EH} = r(1 - \cos \alpha)$, $\overline{EG} = r[1 - \cos(\alpha - \beta)]$, mamy

$$M_s = -Pr(1 - \cos \alpha) + qr^2(\alpha - \sin \alpha). \quad (c)$$

Wyniki (a)÷(c) ilustrujemy wykresami perspektywicznymi, jak podany na rysunku wykres M_g . Ekstrema M_g i M_s wyznaczamy z warunków $dM_g/d\alpha = 0$ i $dM_s/d\alpha = 0$ itd. Naprężenia określamy jak w prętach prostych, tj. pomijając wpływ krzywizny. Dokładność tego przybliżenia jest rzędu b/r , gdzie b — gabaryt przekroju mierzony równoległe do płaszczyzny ramy.

Z tych przykładów ram przestrzennych widać istotną rolę rysunku konstrukcji lub jej fragmentów zwłaszcza przy badaniu równowagi.

Zadania

1. Na ramę (rys. 9.14) działa w punkcie E moment $M^* = 20 \text{ kN m}$ o wektorze prostopadłym do AB . Określić przebieg T , M_g i M_s .

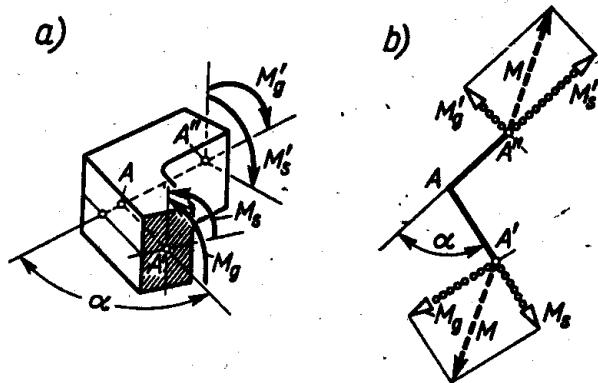
Odp. Na części $ACDE$ wykresy, jak na rys. 9.15, zredukowane pięć razy. Na części $EFGB$ wykresy M_s i T , jak w części $ACDE$, a wykres M_g przeciwny. W przekroju E przeskok M_g od $+10 \text{ kN m}$ do -10 kN m .

2. W przekroju A (rys. 9.16) działa w płaszczyźnie xz moment $M_A^* = 10 \text{ kN m}$. Wyznaczyć wysiłek przekrojów.

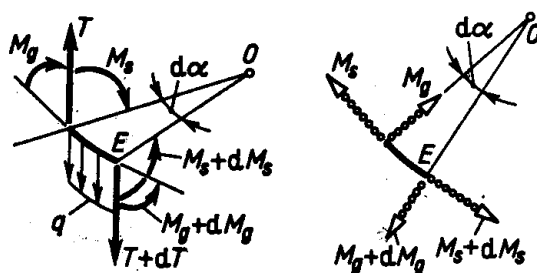
Odp. Część ABC zginana w płaszczyźnie xz , $M_g = M_A^* = \text{const}$. Pręt CD skręcany; $M_s = M_A^* = \text{const}$.

3. W punkcie A pierścienia (rys. 9.17) działa dawna siła P i moment $M_A^* = Pr$, którego wektor ma zwrot i kierunek zgodny z osią OB . Wyznaczyć wysiłek przekrojów.

Odp. $M_s = Pr = \text{const}$, $M_g \equiv 0$, niezależnie od kąta α .



Rys. 9.18. Analiza równowagi naroża



Rys. 9.19. Równowaga elementu pierścienia

4. Jak zmieniają się wyrażenia (b) i (c), jeśli $P = 0$, zaś q jest liniowo zależne od α , tj. $q = q_D(2\alpha/3\pi)$.

Odp. $M_s = -2q_D r^2(\alpha - \sin \alpha)/3\pi$, $M_g = -q_D r^2(\alpha^2 + 2\cos \alpha - 2)/3\pi$.

5. W narożu \mathcal{N} ramy (rys. 9.18a) kąt $\alpha \neq \pi/2$. Jakie są M'_g i M'_s w przekroju A'' (za narożem), jeśli w przekroju A' (przed narożem) działają znane M_g i M_s ?

Rozwiązanie wykreślne. Na rysunku naroża w rzucie (rys. 9.18b) nanosimy wektory M_g i M_s , oraz wypadkowy wektor M . W przekroju A'' przeciwny wektor M rozkładamy na M'_g i M'_s .

Rozwiązanie analityczne wynika z poprzedniego

$$M'_s = M_g \sin \alpha + M_s \cos \alpha, \quad M'_g = M_s \sin \alpha - M_g \cos \alpha.$$

6. Dla pierścienia (rys. 9.17) z wzoru (c) mamy $dM_s/d\alpha = -Pr \sin \alpha + qr^2(1 - \cos \alpha)$, a więc $dM_s/d\alpha = -M_g$. Czy to jest przypadek?

Odp. Nie. Z równowagi momentów względem osi stycznej w punkcie E do elementu pierścienia (rys. 9.19) mamy

$$(M_s + dM_s) - M_s \cos d\alpha + M_g \sin d\alpha = 0$$

i po uwzględnieniu, że $\cos d\alpha = 1$, $\sin d\alpha = d\alpha$,

$$dM_s/d\alpha = -M_g.$$

Podobnie z dwóch pozostałych równań równowagi mamy

$$dM_g/d\alpha = Tr + M_s, \quad dT/d\alpha = -qr.$$